Fehlerschranken für Quadraturformeln gegebenen Grades

Brass, Helmut
Fischer, Jan-Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 49, 1998, S.251-261

J. Cramer Verlag, Braunschweig

Fehlerschranken für Quadraturformeln gegebenen Grades

Von **Helmut Brass** und **Jan-Wilhelm Fischer,** Braunschweig*

(Eingegangen am 13.07.1999)

1. Übersicht

Zur approximativen Berechnung von

$$I[f] := \int_{-1}^{1} f(x)dx, \quad f \in C[-1,1]$$

werden in der Praxis "positive Quadraturformeln" (Q.F.) verwendet, das sind Funktionale Q der Form

$$(1) \qquad Q[f] := \sum_{\nu=1}^{n} a_\nu \, f(x_\nu)\,, \quad -1 \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq 1\,;\; a_\nu \geq 0\,.$$

Der "Fehler" $R[f]$ wird naheliegenderweise definiert mittels

$$R := I - Q\,.$$

Um die Güte des Näherungswertes $Q[f]$ zu beurteilen, benötigt man Fehlerschranken, am häufigsten werden solche des Typs

$$(2) \qquad |R[f]| \leq \rho_s(Q)\|f^{(s)}\|\,,$$

$$\rho_s(Q) := \sup\{|R[f]| : \|f^{(s)}\| \leq 1\}$$

(mit $\|g\| := \sup\{|g(x)| : -1 \leq x \leq 1\}$) verwendet. Offenbar folgt aus der Gültigkeit von (2)

$$R[f] = 0 \quad \text{für alle } f \in \mathcal{P}_{s-1}\,,$$

($\mathcal{P}_m$: Menge der Polynome m -ten Grades). Zur Charakterisierung der hiernach überhaupt interessierenden Q.F. verwendet man ihren "Grad"

$$\deg Q := \sup\{m : R[\mathcal{P}_m] = 0\}\,.$$

* Prof. Dr. H. Braß, Dipl.-Math. J.-W. Fischer · Institut für Angewandte Mathematik der TU Braunschweig · Pockelsstraße 14 · D- 38106 Braunschweig

Zu einer gegebenen Q.F. mit $\deg Q = m$ lassen sich in prinzipiell ganz schematischer Weise mit Hilfe der Peano-Kern-Methode (hierzu z.B. Brass [1977] oder Hämmerlin/Hoffmann [1989]) die Zahlen $\rho_1(Q)$, $\rho_2(Q), \dots, \rho_{m+1}(Q)$ berechnen, damit erhält man, sofern die notwendigen Ableitungen existieren, $m+1$ verschiedene Schranken für $|R[f]|$. Viele Beispiele (etwa bei Brass/Fischer [1999] oder Brass/Fischer/Petras [1996]) zeigen, daß diese Schranken von ganz unterschiedlicher Qualität sein können, man wird daher alle diese Schranken nebeneinander betrachten wollen.

Die immerhin technisch aufwendige Berechnung der $\rho_s(Q)$ kann man sich in vielen Fällen ersparen, indem man für die $\rho_s(Q)$ ihrerseits obere Schranken benutzt, die nur von $\deg Q$ abhängen. Daß derartige Schranken überhaupt existieren, folgt leicht aus klassischen Resultaten der Approximationstheorie, für den gedachten Zweck wird es aber auf möglichst scharfe Schranken ankommen. Man definiert demgemäß

$$\rho_{s,m} := \sup\{\rho_s(Q) : \deg Q \geq m\}, \quad s = 1, 2, \dots, m.$$

Die Asymptotik dieser Zahlen für $m \to \infty$ bei festem s ist in Brass [1993a] bestimmt. Wir verwenden hier das gleiche Beweisprinzip, um zu asymptotisch scharfen oberen Schranken zu kommen. Eine direkte Übertragung des Beweises Brass [1993a] führt für kleine m zu sehr schlechten Schranken, wir haben daher den Beweis in Abschnitt 3 modifiziert. Auch in der jetzigen Form sind Verschärfungen möglich, sie würden aber zu erheblichen Komplikationen im Beweis führen, ohne daß im praktisch bedeutsamen Anwendungsbereich: kleine s -Werte (also etwa $s = 1, \dots, 5$) und große m - Werte (etwa $m = 30, \dots, 100$) sich erhebliche Verbesserungen ergäben. Für die speziellen Fälle $s = 1, \dots, 5$ haben wir eine möglichst sorgfältige Abschätzung vorgenommen, deren Ergebnis wir hier mitteilen, ohne auf Beweis-Details einzugehen.

Zur Formulierung unseres Ergebnisses benötigen wir die Bernoulli-Funktionen B_s

$$B_s(x) := -2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{\cos(2\pi\mu x - \frac{1}{2}\pi s)}{(2\pi\mu)^s}, \quad s = 1, 2, \dots \tag{3}$$

und die durch

$$\gamma_s := (2\pi)^s \int_0^1 |B_s(x)| dx$$

definierten Konstanten, insbesondere ist $\gamma_1 = \frac{\pi}{2}$, $\gamma_2 = \frac{2\sqrt{3}\,\pi^2}{27}$, $\gamma_3 = \frac{\pi^3}{24}, \dots$. Aus Ergebnissen von Lehmer [1940] folgert man $\gamma_s \in [1, \frac{\pi}{2}]$. Mit der Bezeichnung

$$h(x) := \sqrt{1 - x^2}$$

läßt sich nun das Ergebnis von Brass [1993a] schreiben:

$$\lim_{m \to \infty} m^s \rho_{s,m} = \gamma_s I[h^s], \quad s = 1, 2, \dots .$$

Das Ziel dieser Arbeit ist der Beweis der folgenden Verschärfung:

Satz. *Es gilt für* $m \geq 2s$

$$\rho_{s,m} \leq \frac{\gamma_s\, I[h^s]}{(m+1-s)^s} + \frac{4\,s(s+1)}{(m+1-s)(m-s)\ldots(m+1-2s)}\,.$$

Ist $s \leq 5$ *, so kann* $4s(s+1)$ *durch die folgenden* c_s

$$c_1 = 4\,,\ c_2 = 6\,,\ c_3 = 6\,,\ c_4 = 7\,,\ c_5 = 7$$

ersetzt werden.

Die wichtigsten speziellen Q.F., auf die dieser Satz angewandt werden kann, sind die Gaußschen Q.F. Q_n^G . Sie sind charakterisiert durch deg $Q_n^G = 2n-1$ $(n$ wie in(1)) . Petras [1988] hat

$$\lim_{n\to\infty} (2n-1)^s\, \rho_s\, (Q_n^G) = \gamma_s\, I[h^s]$$

bewiesen und in den Spezialfällen $s = 1,2,3$ hat er in Petras [1989], Petras [1993], Petras [1999] Schranken für $\rho_s(Q_n^G)$ angegeben, die für $s = 1,2$ etwas schärfer sind als die des Satzes.

Die Voraussetzung $m \geq 2s$ im Satz ist in der Praxis unerheblich, bei Bedarf könnte man gute Schranken für $\rho_{s,m}$ im Fall $m < 2s$ mit einer wesentlich anderen Methode erhalten (Brass [1993a], Brass/Förster [1987]). Daß es kein ganz einfaches Resultat geben kann, folgt aus der Beziehung

$$\sup\,\{m^s\,\rho_{s,m}\ :\ m = s-1, s, s+1, \ldots ; s = 1,2,\ldots\} = \infty\,,$$

die man leicht aus den bekannten Werten von $\rho_{2n}\,(Q_n^G)$ folgert.

Der Kern des in Abschnitt 4 geführten Beweises ist ein Resultat über Approximation durch Polynome, das wir in Abschnitt 3 formulieren und beweisen. Es stützt sich auf ein Lemma über trigonometrische Approximation, das wir zunächst behandeln.

2. Trigonometrische Approximation

Wir setzen

$$a_\kappa[f] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos\kappa x\, dx\,, \quad b_\kappa[f] = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin\kappa x\, dx\,.$$

Lemma 1. *Es gibt Zahlen* $\vartheta_{\kappa,s}$ *mit*

(4) $$|1-\vartheta_{\kappa,s}| \leq 1.2\,(\frac{\kappa}{n+1})^{s+1}\,, \quad \kappa = 1,2,\ldots,n$$

derart, daß für jede 2π *-periodische Funktion mit beschränkter* s*–ter Ableitung*

(5)
$$\left\| f - \frac{1}{2}a_0[f] - \sum_{\kappa=1}^{n} \vartheta_{\kappa,s}\,[a_\kappa[f]\cos\kappa\cdot + b_\kappa[f]\sin\kappa\cdot]\right\| \leq \frac{\gamma_s}{(n+1)^s}\min_{const}\, \|f^{(s)} - const\|$$

gilt.

Beweis: Man geht aus von der für beliebige $\vartheta_{\kappa,s}$ gültigen und mit Hilfe von (3) leicht zu verifizierenden Identität

$$f(x) - \frac{1}{2}a_0[f] - \sum_{\kappa=1}^{n} \vartheta_{\kappa,s}\,[a_\kappa[f]\cos\kappa x + b_\kappa[f]\sin\kappa x] =$$

$$- (2\pi)^{s-1}\int_0^{2\pi}\left[B_s\left(\frac{z}{2\pi}\right) - v(z)\right] f^{(s)}(x-z)\,dz$$

mit

(6) $$v(z) = -2(2\pi)^{-s}\sum_{\kappa=1}^{n}\vartheta_{\kappa,s}\,\kappa^{-s}\cos\left(\kappa z - s\frac{\pi}{2}\right),$$

aus der man für die linke Seite von (5) sofort die Abschätzung

$$(2\pi)^{s-1}\int_0^{2\pi}\left|B_s\left(\frac{z}{2\pi}\right) - v(z)\right| dz\,\min_{const}\|f^{(s)} - const\|$$

erhält. Man wählt nun für v dasjenige trigonometrische Interpolationspolynom von $B_s\left(\frac{\cdot}{2\pi}\right)$, dessen Stützstellen gerade die $2n+2$ Nullstellen von $B_s\left((n+1)\frac{\cdot}{2\pi}\right)$ auf $[0, 2\pi[$ sind. Mit diesem v läßt sich der Beweis wie in Brass [1993a] S. 790 zu Ende führen. Die eigentliche Schwierigkeit ist der Nachweis, daß dieses Interpolationspolynom sich in der Form (6) mit (4) darstellen läßt. Wir führen diesen Beweis nur im komplizierteren Fall eines geraden s aus.

Dazu benötigen wir

Lemma 2. *Es sei* $f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu\cos\nu x$ *sowie* $\xi\in]0,\frac{1}{2}[$ *und* $n\in\mathbb{N}_+$ *gegeben. Es werde* $x_\mu := (\mu+\xi)\frac{2\pi}{n+1}$ *gesetzt. Dann existiert*

$$\mathrm{intpol}[f](x) := \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\kappa\cos\kappa x$$

mit $\mathrm{intpol}[f](x_\mu) = f(x_\mu)\quad(\mu = 0,1,\ldots,n)$ *und es gilt*

$$\alpha_\kappa = \frac{-2}{(n+1)\sin 2\pi\xi}\sum_{\mu=0}^{n} f(x_\mu)\sin(\kappa x_\mu - 2\pi\xi)$$

sowie

$$\frac{\alpha_0}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum_{\sigma=1}^{\infty} a_{\sigma(n+1)}\cos\sigma 2\pi\xi$$

$$\alpha_\kappa = a_\kappa + \operatorname{ctg} 2\pi\xi\sum_{\sigma=1}^{\infty}\sin\sigma 2\pi\xi\,[a_{\sigma(n+1)+\kappa} - a_{\sigma(n+1)-\kappa}]$$

$$+ \sum_{\sigma=1}^{\infty}\cos\sigma 2\pi\xi\,[a_{\sigma(n+1)+\kappa} + a_{\sigma(n+1)-\kappa}],\quad \kappa = 1,2,\ldots,n.$$

Der Beweis von Lemma 2 erfordert etwas langwierige Rechnungen, begegnet aber keinen prinzipiellen Schwierigkeiten.

Kehren wir zurück zum Beweis von Lemma 1, sei s also jetzt gerade. B_s hat auf $[0,1]$ die beiden Nullstellen ξ_s und $1-\xi_s$, für die Lehmer [1940] beweist

$$\frac{\pi}{2} - 2^{-s} \leq 2\pi\xi_s \leq \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

Wir wählen nun in Lemma 2 $f = B_s(\frac{\cdot}{2\pi})$, $\xi = \xi_s$ und beachten, daß aus Symmetriegründen intpol auch an den Stellen $(\mu - \xi_s)\frac{2\pi}{n+1}$ $(\mu = 1, \ldots, n+1)$ interpoliert. Man erhält

$$\frac{\alpha_0}{2} = -\frac{2(-1)^{\frac{s}{2}}}{(2\pi)^s}\sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{\cos\sigma 2\pi\xi_s}{\sigma^s(n+1)^s} = \frac{B_s(\xi_s)}{(n+1)^s} = 0.$$

Damit ist gezeigt, daß die Darstellung (6) möglich ist und man erhält mit der Abkürzung $y := \frac{\kappa}{n+1}$

$$\begin{aligned}\vartheta_{\kappa,s} = 1 + y^s \Bigg\{ & \operatorname{ctg} 2\pi\xi_s \sum_{\sigma=1}^{\infty} \sin\sigma 2\pi\xi_s \left[\frac{1}{(\sigma+y)^s} - \frac{1}{(\sigma-y)^s}\right] \\ & + \sum_{\sigma=1}^{\infty}\cos\sigma 2\pi\xi_s \left[\frac{1}{(\sigma+y)^s} + \frac{1}{(\sigma-y)^s}\right]\Bigg\}.\end{aligned}$$

Zieht man noch einmal $B_s(\xi_s) = 0$ heran, ergibt sich

$$\begin{aligned}|1 - \vartheta_{\kappa,s}| = y^{s+1}\Bigg| & \left[\frac{2}{y(1+y)^s} - \frac{2}{y}\right]\cos 2\pi\xi_s \\ & + \operatorname{ctg} 2\pi\xi_s \sum_{\sigma=2}^{\infty}\sin\sigma 2\pi\xi_s\left[\frac{1}{y(\sigma+y)^s} - \frac{1}{y(\sigma-y)^s}\right] \\ & + \sum_{\sigma=2}^{\infty}\cos\sigma 2\pi\xi_s\left[\frac{1}{y(\sigma+y)^s} + \frac{1}{y(\sigma-y)^s} - \frac{2}{y\sigma^s}\right]\Bigg|.\end{aligned}$$

Aus der Monotonie der Teilterme folgt für $s \geq 6$

$$\begin{aligned}|1 - \vartheta_{\kappa,s}| &\leq y^{s+1}\Bigg| 2s\cos 2\pi\xi_s + \operatorname{ctg} 2\pi\xi_s \sum_{\sigma=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(\sigma-1)^s} - \frac{1}{(\sigma+1)^s}\right] \\ &\qquad + \sum_{\sigma=2}^{\infty}\left[\frac{1}{(\sigma+1)^s} - \frac{2}{\sigma^s} + \frac{1}{(\sigma-1)^s}\right]\Bigg| \\ &= y^{s+1}\left[2s\cos 2\pi\xi_s + \operatorname{ctg} 2\pi\xi_s\left(1 + \frac{1}{2^s}\right) + \left(1 - \frac{1}{2^s}\right)\right] \\ &\leq 1.2 \cdot y^{s+1}.\end{aligned}$$

Schätzt man $|1 - \vartheta_{\kappa,s}|$ schärfer ab, erhält man die Aussage auch für $s = 2$ und $s = 4$.

3. Approximation durch Polynome

Lemma 3. *Es sei* $G_s := (\cos y - \cos\cdot)^s$ *. Damit gilt*

$$G_s^{(\kappa)}(y) = 0 \quad \text{für } \kappa < s$$
$$G_s^{(s)}(y) = s!\sin^s y$$
$$|G_s^{(\kappa)}(y)| \leq \mathcal{S}_{\kappa,s} := \sum_{\lambda=0}^{s} (-1)^{\lambda+s} \binom{s}{\lambda} \lambda^\kappa \quad \text{für } \kappa \geq 1$$

Beweis: Die Leibnizsche Formel ergibt

$$G_{s+1}^{(\kappa)} = \sum_{\sigma=0}^{\kappa} \binom{\kappa}{\sigma} G_s^{(\sigma)} G_1^{(\kappa-\sigma)},$$

also gilt

$$G_{s+1}^{(\kappa)}(y) = \sum_{\sigma=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa}{\sigma} G_s^{(\sigma)}(y)\, G_1^{(\kappa-\sigma)}(y)$$

und

$$|G_{s+1}^{(\kappa)}(y)| \leq \sum_{\sigma=0}^{\kappa-1} \binom{\kappa}{\sigma} |G_s^{(\sigma)}(y)|.$$

Hiermit läßt sich durch Induktion nach s der Beweis leicht erbringen.

Lemma 4. *Für ein* $f \in C[-1,1]$ *gelte* $\|f^{(s)}\| \leq 1$ *. Dann existiert zu jedem* $m \geq 2s$ *ein* $p \in \mathcal{P}_m$ *mit*

(8)
$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\gamma_s}{(m+1-s)^s}\left(\sqrt{1-x^2}\right)^s + \frac{\frac{\pi}{4}\, s(s+1)}{(m+1-s)(m-s)\cdots(m+1-2s)}$$

und

(9) $$\int_{-1}^{1} [f(x) - p(x)]dx \leq \frac{2.13 \cdot s(s+1)}{(m+1-s)(m-s)\cdots\ (m+1-2s)}$$

Beweis: Ausgangspunkt ist Taylors Formel

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{s-1} \nu!^{-1} f^{(\nu)}(0)x^\nu + (s-1)!^{-1} \int_0^x f^{(s)}(u)(x-u)^{s-1}du.$$

Wir setzen $x = \cos y$ ein und substituieren im Integral $u = \cos v$:

(10) $$f(\cos y) = \sum_{\nu=0}^{s-1} \nu!^{-1}\, f^{(\nu)}(0)\cos^\nu y - s!^{-1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{y} f^{(s)}(\cos v)\, G_s'(v)dv.$$

Es werde nun definiert

$$c_\kappa := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(s)}(\cos u) \cos \kappa u \, du \,,$$

$$h_\lambda(x) := \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu \nu^{-\lambda} \cos\left(\nu x - \lambda \frac{\pi}{2}\right) .$$

Damit schreibt sich (10)

$$f(\cos y) = \tilde{t}_0(y) - s!^{-1} \int_{\frac{\pi}{2}}^{y} h_0(v) \, G_s'(v) dv$$

mit einem $\tilde{t}_0 \in \mathcal{T}_s$ (: Menge der trigonometrischen Ausdrücke s–ter Ordnung). Durch σ –fache partielle Integration folgt

$$\begin{aligned} f(\cos y) = \tilde{t}_\sigma(y) - s!^{-1} \Bigg[&\sum_{\kappa=1}^{\sigma} (-1)^{\kappa-1} h_\kappa(y) \, G^{(\kappa)}(y) \\ &+ (-1)^\sigma \int_{\frac{\pi}{2}}^{y} h_\sigma(v) \, G^{(\sigma+1)}(v) \, dv \Bigg] \end{aligned}$$

mit $\tilde{t}_\sigma \in \mathcal{T}_s$.

Wir konstruieren nun gemäß Lemma 1 $t_\kappa \in \mathcal{T}_{m-s}$ mit

(11) $$\|h_\kappa - t_\kappa\| \le \frac{\gamma_\kappa}{(m+1-s)^\kappa}$$

und definieren $p_\sigma \in \mathcal{P}_m$ durch

$$\begin{aligned} p_\sigma(\cos y) = \tilde{t}_\sigma(y) - s!^{-1} \Bigg[&\sum_{\kappa=1}^{\sigma} (-1)^{\kappa-1} t_\kappa(y) \, G^{(\kappa)}(y) \\ &+ (-1)^\sigma \int_{\frac{\pi}{2}}^{y} t_\sigma(v) \, G^{(\sigma+1)}(v) dv \Bigg] . \end{aligned}$$

Es folgt

(12) $$\begin{aligned} f(\cos y) - p_\sigma(\cos y) = - s!^{-1} \Bigg[&\sum_{\kappa=1}^{\sigma} (-1)^{\kappa-1} [h_\kappa(y) - t_\kappa(y)] \, G^{(\kappa)}(y) \\ &+ (-1)^\sigma \int_{\frac{\pi}{2}}^{y} [h_\sigma(v) - t_\sigma(v)] \, G^{(\sigma+1)}(v) dv \Bigg] . \end{aligned}$$

Es ist $G \in \mathcal{T}_s$ mit $\|G\| \le 2^s$, und aus der Bernsteinschen Ungleichung folgt $\|G^{(\sigma+1)}\| \le 2^s \, s^{\sigma+1}$. Ziehen wir nun Lemma 3 und (11) heran, so erhält man aus (12)

$$\begin{aligned} |f(\cos y) - p_\sigma(\cos y)| \le \frac{\gamma_s \sin^s y}{(m+1-s)^s} &+ s!^{-1} \sum_{\kappa=s+1}^{\sigma} \frac{\gamma_\kappa}{(m+1-s)^\kappa} \mathcal{S}_{\kappa,s} \\ &+ \frac{\pi}{2} \frac{\gamma_\sigma}{(m+1-s)^\sigma} 2^s \, s^{\sigma+1} . \end{aligned}$$

Nun ist

$$\begin{aligned}\sum_{\kappa=s+1}^{\sigma} \frac{\gamma_\kappa}{N^\kappa} \mathcal{S}_{\kappa,s} &\le \frac{\pi}{2} \sum_{\kappa=s+1}^{\sigma} \frac{\mathcal{S}_{\kappa,s}}{N^\kappa} \le \frac{\pi}{2} \left[\sum_{\kappa=1}^{\infty} \frac{\mathcal{S}_{\kappa,s}}{N^\kappa} - \frac{\mathcal{S}_{s,s}}{N^s} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\sum_{\lambda=0}^{s} (-1)^{\lambda+s} \binom{s}{\lambda} \sum_{\kappa=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda}{N}\right)^\kappa - \frac{s!}{N^s} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\sum_{\lambda=0}^{s} (-1)^{\lambda+s} \binom{s}{\lambda} \frac{\lambda}{N-\lambda} - \frac{s!}{N^s} \right] \\ &= \frac{\pi}{2} \left[\frac{s!}{(N-1)(N-2)\dots(N-s)} - \frac{s!}{N^s} \right] \le \frac{\pi}{2}\, s!\, \frac{\frac{1}{2} s(s+1)}{N(N-1)\dots(N-s)}\end{aligned}$$

und damit ist

(13)

$$\begin{aligned}|f(\cos y) - p_\sigma(\cos y)| \le \frac{\gamma_s \sin^s y}{(m+1-s)^s} &+ \frac{\frac{\pi}{4} s(s+1)}{(m+1-s)(m-s)\dots(m+1-2s)} \\ &+ \frac{\pi}{2} \frac{\gamma_\sigma}{(m+1-s)^\sigma} 2^s s^{\sigma+1}\end{aligned}$$

bewiesen.

Mit dem oben definierten p_σ erhalten wir aus (12) und der eben angewandten Abschätzungsmethode

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} [f(x) - p_\sigma(x)]dx &= \int_0^\pi [f(\cos y) - p_\sigma(\cos y)] \sin y \, dy \\ &= (-1)^s \int_0^\pi [h_s(y) - t_s(y)] \sin^{s+1} y \, dy + r,\end{aligned} \tag{14}$$

$$\|r\| \le \frac{\frac{\pi}{2} s(s+1)}{(m+1-s)(m-s)\cdots(m+1-2s)} + \pi \frac{\gamma_\sigma}{(m+1-s)^\sigma} 2^s s^{\sigma+1}.$$

Es bleibt also

$$\begin{aligned}&\int_0^\pi [h_s(y) - t_s(y)] \sin^{s+1} y \, dy = \\ &\qquad \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_\kappa \kappa^{-s} (1 - \vartheta_{\kappa,s}) \int_0^\pi \cos\left(\kappa y - s\frac{\pi}{2}\right) \sin^{s+1} y \, dy\end{aligned} \tag{15}$$

(mit den $\vartheta_{\kappa,s}$ aus Lemma 1 und $\vartheta_{\kappa,s} = 0$ für $\kappa > m - s$) zu untersuchen.

Hierzu verwenden wir

$$\left| \int_0^\pi \cos\left(\kappa y - s\frac{\pi}{2}\right) \sin^{s+1} y \, dy \right| \le \frac{4\sqrt{s+1}}{\kappa^2}. \tag{16}$$

Man kann zum Beweis $\kappa \equiv s \,(\mathrm{mod}\, 2)$ voraussetzen, andernfalls ist das Integral Null. Unter Beachtung der Symmetrie erhält man nach zweifacher partieller Integration

$$\frac{2}{\kappa^2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\kappa y - (s+2)\frac{\pi}{2}\right) (\sin^{s+1} \cdot)''(y) dy \,.$$

Nun ist $(\sin^{s+1} \cdot)''$ positiv auf $[0, y_E[$ und negativ auf $]y_E, \frac{\pi}{2}]$ mit $y_E := \arccos(s+1)^{-\frac{1}{2}}$. Der Mittelwertsatz gibt

$$\begin{aligned}
&\left| \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left(\kappa y - (s+2)\frac{\pi}{2}\right) (\sin^{s+1} \cdot)''(y)\, dy \right| = \left| \int\limits_0^{y_E} + \int\limits_{y_E}^{\frac{\pi}{2}} \right| \\
&= \left| \cos\left(\kappa \eta_1 - (s+2)\frac{\pi}{2}\right) \int\limits_0^{y_E} (\sin^{s+1} \cdot)''(y) dy \right. \\
&\qquad \left. + \cos\left(\kappa \eta_2 - (s+2)\frac{\pi}{2}\right) \int\limits_{y_E}^{\frac{\pi}{2}} (\sin^{s+1} \cdot)''(y) dy \right| \\
&\leq 2 (\sin^{s+1} \cdot)'(y_E) \leq 2\sqrt{s+1} \,.
\end{aligned}$$

Man setzt die nun erwiesene Abschätzung (16) in (15) ein, verwendet die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$\left| \int_0^{\pi} [h_s(y) - t_s(y)] \sin^{s+1} y \, dy \right| \leq 4\sqrt{s+1} \left[\sum_{\kappa=1}^{\infty} c_\kappa^2 \sum_{\kappa=1}^{\infty} (1 - \vartheta_{\kappa,s})^2 \kappa^{-2s-4} \right]^{\frac{1}{2}}$$

und die Besselsche Ungleichung $(: \sum_{\kappa=1}^{\infty} c_\kappa^2 \leq \pi^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} [f^{(s)}(\cos t)]^2 dt \leq 2)$:

$$\left| \int_0^{\pi} [h_s(y) - t_s(y)] \sin^{s+1} y \, dy \right| \leq 4\sqrt{2s+2} \left[\sum_{\kappa=1}^{\infty} (1 - \vartheta_{\kappa,s})^2 \kappa^{-2s-4} \right]^{\frac{1}{2}} .$$

Jetzt ziehen wir (4) heran:

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^{\pi} [h_s(y) - t_s(y)] \sin^{s+1} y \, dy \right| \\
&\quad \leq 4\sqrt{2s+2} \left[\frac{1.2^2}{(m+1-s)^{2s+2}} \sum_{\kappa=1}^{m-s} \kappa^{-2} + \sum_{\kappa > m-s} \kappa^{-2s-4} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\quad \leq 4\sqrt{2s+2} \frac{1.2}{(m+1-s)^{s+1}} \left[\sum_{\kappa=1}^{\infty} \kappa^{-2} \right]^{\frac{1}{2}} = \frac{4.8 \cdot \pi}{\sqrt{3}} \frac{s(s+1)}{s\sqrt{s+1}} \frac{1}{(m+1-s)^{s+1}} \\
&\quad \leq \frac{0.55 \cdot s(s+1)}{(m+1-s)^{s+1}}
\end{aligned}$$

wobei die letzte Abschätzung $s \geq 6$ voraussetzt.

Wir setzen das erhaltene Resultat in (14) ein und lassen dort $\sigma \to \infty$ gehen, ebenso in (13). Die Folge p_σ enthält eine konvergente Teilfolge, mit deren Grenzwert dann (8) und (9) gelten.

4. Abschluß des Beweises

Ist $\deg Q \geq m$ und $\|f^{(s)}\| \leq 1$, so gilt mit dem gemäß Lemma 4 konstruierten p

$$\begin{aligned}|R[f]| &= |R[f-p]| \\ &\leq |I[f-p]| + |Q[f-p]| \\ &\leq \frac{(2.13+\frac{\pi}{2})s(s+1)}{(m+1-s)\cdots(m+1-2s)} + \frac{\gamma_s\, Q[h^s]}{(m+1-s)^s} \\ &\leq \frac{3.71\cdot s(s+1)}{(m+1-s)\cdots(m+1-2s)} + \frac{\gamma_s\, I[h^s]}{(m+1-s)^s} + \frac{\gamma_s\, |R[h^s]|}{(m+1-s)^s}\,.\end{aligned}$$

Zur Abschätzung des letzten Summanden verwendet man die für alle positiven Q.F. mit $\deg Q \geq m$ gültige Schranke

$$|R[f]| \leq \frac{\pi}{m+1}\,\mathrm{Var}\, f$$

(Brass [1993b]), wo $\mathrm{Var}\, f$ die Totalvariation von f bedeutet. Es folgt also

$$\gamma_s\,|R[h^s]| \leq \gamma_s\,\frac{2\pi}{m+1} \leq \frac{0.24\cdot s\,(s+1)}{m+1}$$

wobei im letzten Schritt wieder $s \geq 6$ benutzt wurde. Einsetzen ergibt jetzt die Behauptung. Verwendet man in (16) die exakten Ausdrücke, kann man den ersten Teil des Satzes auch für $s = 2, 3, 4, 5$ nachweisen. Für $s = 1$ ziehen wir $c_1 = 4$ heran.

5. Literatur

Brass, H.: Quadraturverfahren. Vandenhoeck und Ruprecht, Göttingen [1977]

Brass, H.; Förster, K.-J.: On the estimation of linear functionals. Analysis 7, 237–258 [1987]

Brass, H.: Asymptotically optimal error bounds for quadrature rules of given degree. Math. of Comp. 61, 785–798 [1993a]

Brass, H.: Bounds for Peano kernels. In: Brass, H.; Hämmerlin, G. (Ed.): Numerical Integration IV. Int. Ser. Numer. Math. 112, Birkhäuser, Basel u.a., 39–55 [1993b]

Brass, H.; Fischer, J.-W.; Petras, K.: The Gaussian quadrature method. Abh. Braunschweigische Wiss. Gesellschaft 47, 115–150 [1996]

Brass, H.; Fischer, J.-W.: Error bounds for Romberg quadrature. Numer. Math. 82, 389–408 [1999]

Hämmerlin, G.; Hoffmann, K.-H.: Numerische Mathematik. Springer, Berlin u.a. [1989]

Lehmer, D.H.: On the maxima und minima of Bernoulli polynomials. Amer. Math. Monthly 47, 533–538 [1940]

Petras, K.: Asymptotic behaviour of Peano kernels of fixed order. In: Brass, H.; Hämmerlin, G. (Ed.): Numerical Integration III. Int. Ser. Numer. Math. 85, Birkhäuser, Basel u.a., 186–198 [1988]

Petras, K.: Normabschätzungen für die ersten Peanokerne der Gauß-Formel. ZAMM 69, T81–T83 [1989]

Petras, K.: Gaussian quadrature formulae–second Peano kernels, nodes, weights and Bessel functions. Calcolo 30, 1–28 [1993]

Petras, K.: Bounds for the third Peano constants of Gaussian quadrature formulae. Erscheint in: Acta Mathematica Hungarica 83 [1999]